LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 10

Višestruki integrali - uzastopno integriranje

Lekcije iz Matematike 2.

10. Višestruki integrali - uzastopno integriranje.

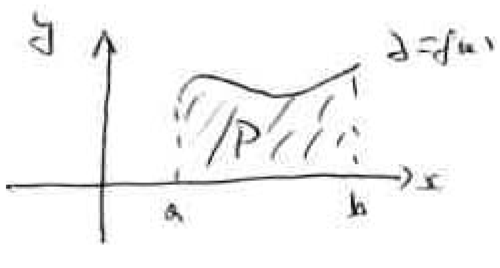
I. Naslov i objašnjenje naslova
U lekciji se uvodi pojam dvostrukog i, općenito, višestrukog integrala i objašnjava njegovo geometrijsko značenje. Takodjer se objašnjava jedna metoda efikasnog računanja dvostrukog integrala - uzastopno integriranje, u pravokutnim i u polarnim koordinatama.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem
Problem odredjivanja obujma tijela koji su omedjeni zakrivljenim plohama odavno je važan matematički i praktični problem. Taj se problem načelno rješava pomoću dvostrukog integrala (analogno tome kako se problem površine rješava pomoću običnog - jednostrukog integrala).

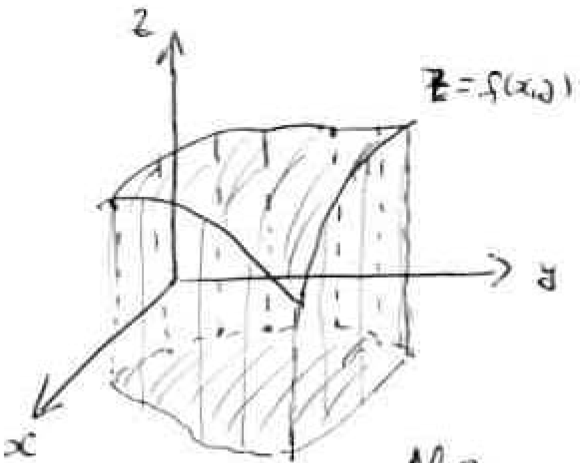
III. Potrebno predznanje
Potrebno je poznavanje pojma funkcije dviju varijabla i njena grafa, te pojam i gemetrijsku interpretaciju odredjenog integrala funkcije jedne varijable - jednostrukog integrala. Takodjer je potrebno poznavati pojam obujma i računanja obujma prizme.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Obujam ispod grafa pozitivne funkcije dviju varijabla.
Analogno tome kako graf pozitivne funkcije f jedne varijable zatvara s osi x površinu (sl.1.), tako graf pozitivne funkcije dviju varijabla s xy-ravninom zatvara prostor (sl.2.). U prvom slučaju riječ je o površini ispod krivulje, a u drugom o prostoru ispod plohe.

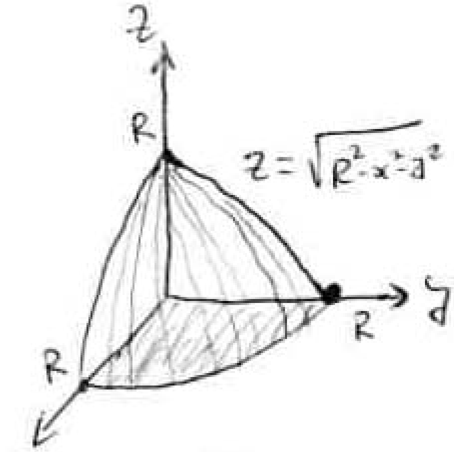


Sl.1.



sl. 2.

Primjer 1. - polukugla. Polukugla polumjera R može se shvatiti kao dio prostora izmedju grafa funkcije $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ i xy-ravnine (sl.3.).



sl. 3.

Djelić obujma - diferencijal obujma.
Prema uzoru na djelić površine $\Delta P(x)$ ispod grafa pozitivne funkcije f jedne varijable, a iznad segmenta od x do $x + \Delta x$ duljine Δx, približnu vrijednost

$$\Delta P(x) \approx f(x)\Delta x$$

i diferencijal površine u x:

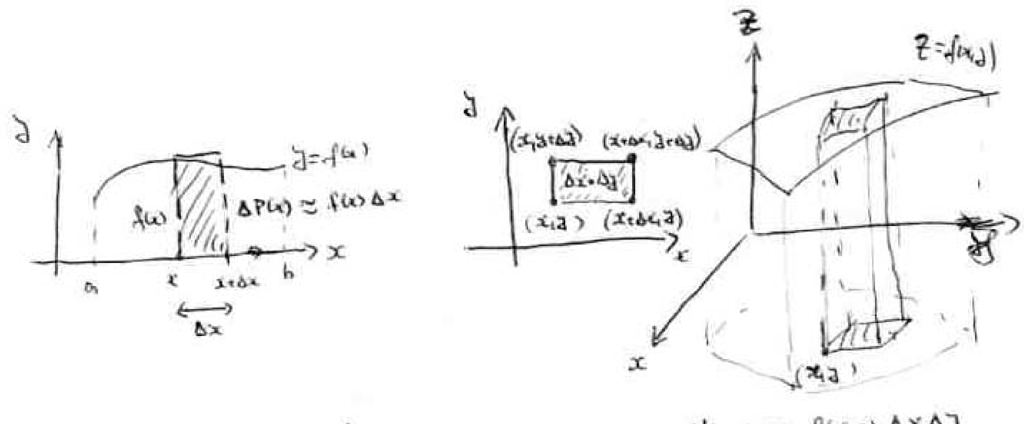
$$dP(x) = f(x)\Delta x$$

definiramo djelić obujma $\Delta V(x)$ ispod grafa pozitivne funkcije f dviju varijabla, a iznad pravokutnika sa stranicama duljina Δx, Δy s jednim vrhom u točki (x, y) kao na slici 4. Vidimo da taj pravokutnik ima površinu $\Delta x \cdot \Delta y$, i da je

$$\Delta V(x) \approx f(x)\Delta x\Delta y$$

odakle definiramo diferencijal obujma u (x, y):

$$dV(x, y) = f(x, y)dxdy$$



Sl. 4.

Računanje obujma ispod pozitivne funkcije - dvostruki integral pozitivne funkcije.
Kod funkcije jedne varijable imali smo pozitivnu funkciju f, segment $[a, b]$ na x-osi i površinu P izmedju segmenta i grafa. Veza izmedju tih veličina dana je odredjenim integralom

$$P = \int_a^b f(x)dx$$

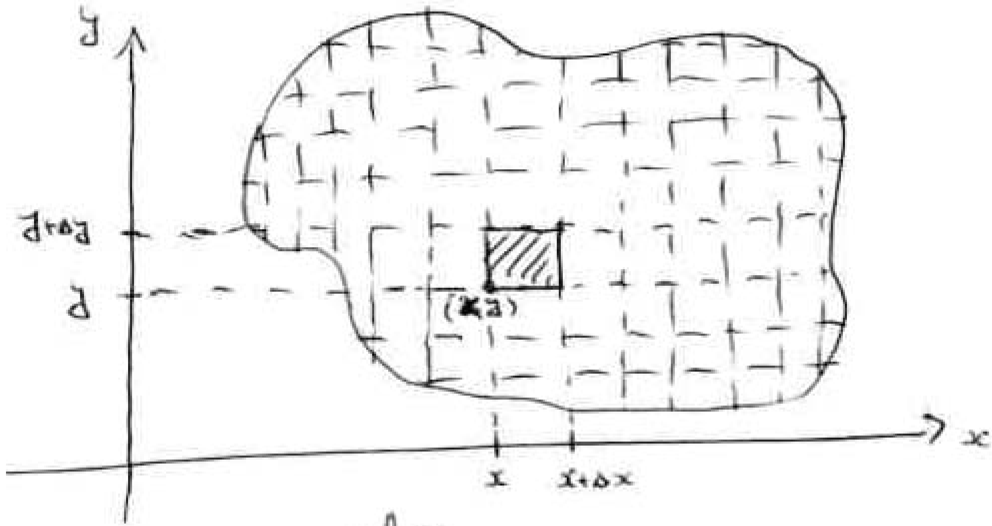
koji se može pisati kao

$$P = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

(čitamo: *integral funkcije f po segmentu* $[a, b]$).
Analogno, kod funkcija dviju varijabla imamo pozitivnu funkciju f dviju varijabla, područje D u xy-ravnini i obujam V izmedju D i grafa funkcije f. Imamo i analognu vezu

$$V = \int\int_D f(x, y)dxdy$$

(čitamo: *dvostruki integral funkcije f po području D*).
Smisao dvostrukog integrala je ukupni obujam, koji je približno suma djelića volumena iznad malih pravokutnika kad područje D podijelimo kao na slici 5. Intuitivno, zamišljamo da smo integriranjem zbrojili beskonačno mnogo diferencijala površina $f(x, y)dxdy$ kad (x, y) prolazi svim točkama područja D i tako dobili ukupni obujam.



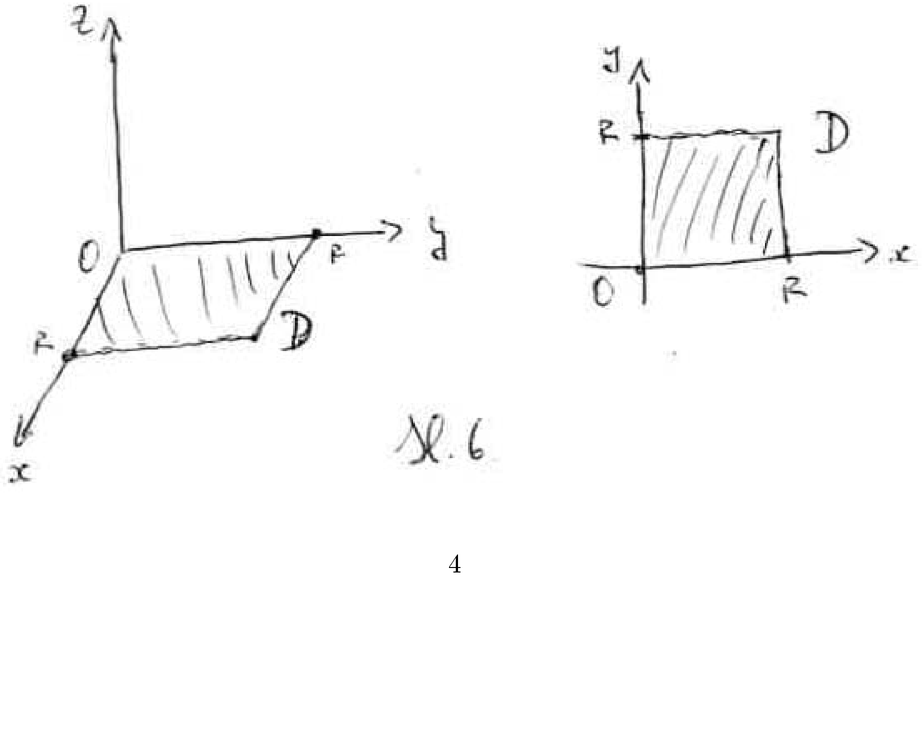
Sl 5

Primjer 2. U Primjeru 1. imamo
$f(x, y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,
$D :=$ krug u xy ravnini polumjera R sa središtem u ishodištu,
a dvostruki integral

$$\int\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$$

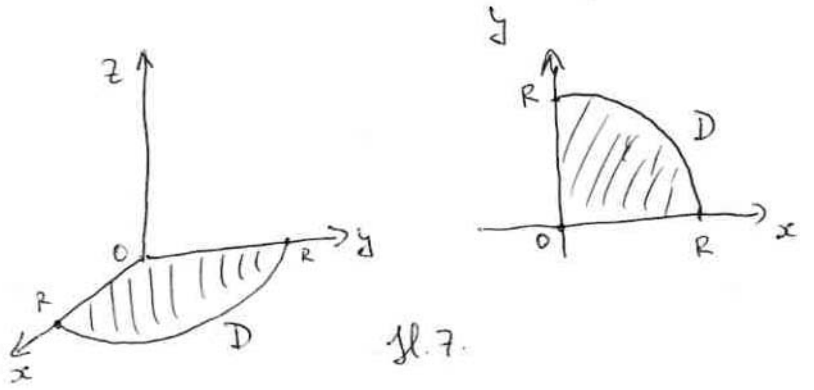
ima značenje obujma polukugle polumjera R.

Primjer 3. (i) $\int\int_D xydxdy$, gdje je D kvadrat u prvom kvadrantu zadan s $0 \leq x \leq R$ i $0 \leq y \leq R$ (sl.6.), ima značenje obujma izmedju tog kvadrata i sedlaste plohe.



Sl. 6

(ii) $\int\int_D xydxdy$, gdje je D dio kruga polumjera R u prvom kvadrantu zadana s $0 \leq x \leq R$ i $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ (sl.7.), ima značenje obujma izmedju tog dijela kruga i sedlaste plohe.



Izračunavanje dvostrukog integrala - uzastopno integriranje.
Ne postoji opća metoda za računanje dvostrukog integrala $\int\int_D f(x,y)dxdy$ za svako područje D. Takva metoda postoji ako je područje D kao na slici 8., tj. ako je zadano nejednakostima

$$a \leq x \leq b \ i \ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

Tada se dvostruki integral svodi na dva uzastopna jednostruka integrala, prema formuli:

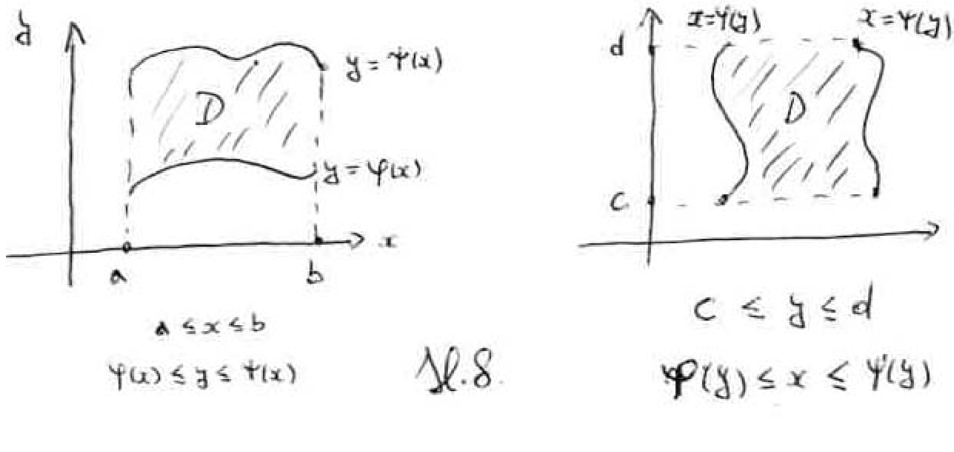
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b [\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy]dx$$

Slično je pri zamjeni x i y koordinate, tj. ako je zadano nejednakostima

$$c \leq y \leq d \ i \ \phi(y) \leq x \leq \psi(y)$$

Tada se dvostruki integral svodi na dva uzastopna jednostruka integrala, prema formuli:

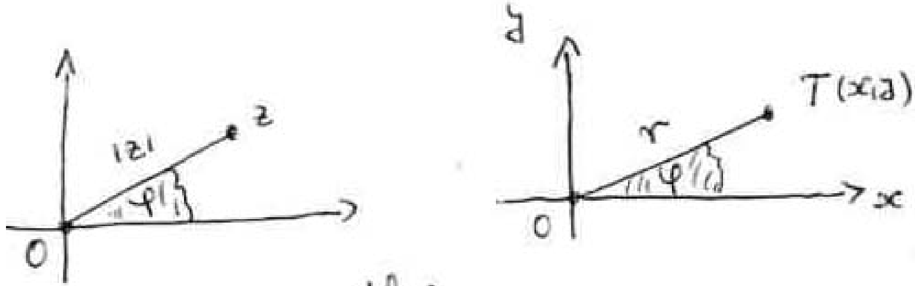
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx]dy$$



Opis postupka uzastopnog integriranja.
1. korak - računanje integrala $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ kao integrala po varijabli y, uz uvjet da je u podintegralnoj funkciji varijabla x konstanta; rezultat će biti neka funkcija ovisna o x.
2. korak - integriranje dobivene funkcije po x; rezultat će biti broj.
Objašnjenje postupka uzastopnog integrala.
Rezultat 1. koraka može se, za svaki konkretni x, interpretirati kao površina presjeka zadanog obujma s ravninom kroz x okomito na os apscisa, a usporedno s yz ravninom. Drugi korak zamišljamo kao "zbrajanje" svih tih površina za sve x od a do b i tako dobijemo traženi obujam.

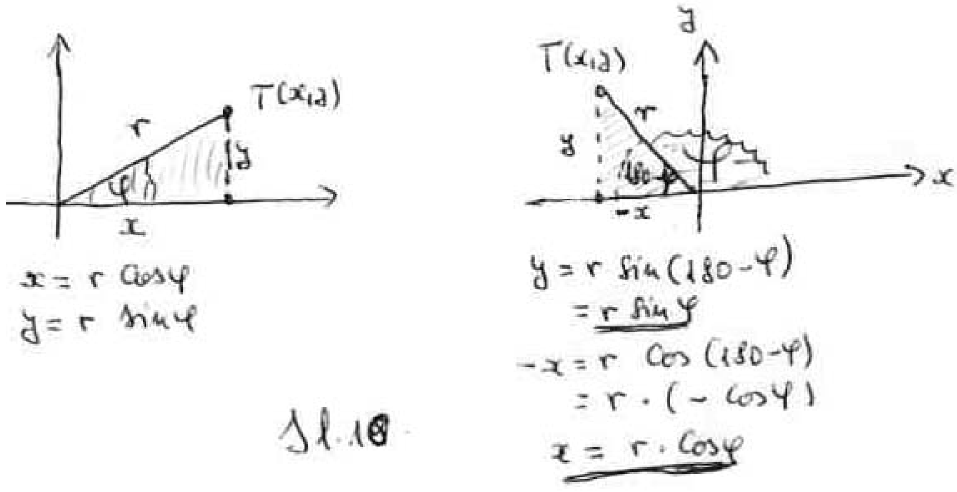
Primjer 4. - primjena uzastopnog integriranja. Izračunajmo obujam iz primjera 3.
(i) Tu je $f(x,y) := xy$, D kvadrat stranice R u prvom kvadrantu, pa je $a = 0,\ b = R,\ \phi(x) = 0,\ \psi(x) = R$, dakle
$V_1 = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D xydxdy =$
$\int_0^R [\int_0^R xydy]dx = \int_0^R [(x\frac{y^2}{2})\ |_{y=0}^{y=R}]dx = \int_0^R \frac{R^2 x}{2}dx = \frac{R^2x^2}{4}\ |_0^R = \frac{R^4}{4}$
(ii) Tu je opet $f(x,y) := xy$, ali sad je D dio kruga polumjera R u prvom kvadrantu, pa je $a = 0,\ b = R,\ \phi(x) = 0,\ \psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, dakle
$V_2 = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D xydxdy =$
$\int_0^R [\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xydy]dx = \int_0^R [(x\frac{y^2}{2})\ |_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}]dx = \int_0^R x\frac{R^2-x^2}{2}dx = (\frac{R^2x^2}{4} - \frac{x^4}{8})\ |_0^R = \frac{R^4}{8}$.
Dakle, $V_1 = 2V_2$ (komentirajte).

Dvostruki integral u polarnim koordinatama. U primjenama katkad je prirodnije razmatrati polarne koordinate umjesto pravokutnih, Kartezijevih. Polarne koordinate su analogne trigonometrijskom prikazu kompleksnog broja: kako je svaki kompleksni broj z različit od nule jednoznačno odredjen svojom apsolutnom vrijednošću $|z|$ i argumentom (kutom) ϕ , tako je i svaka točka T ravnine jednoznačno odredjena udaljenošću od ishodišta r, i kutom ϕ što ga spojnica $\overline{OT}$ zatvara s pozitivnom zrakom x-osi (slika 9.). Uobičajena je ova terminologija:
realni brojevi x, y su kartezijeve koordinate točke T, uredjeni par (x,y) je prikaz točke T u Kartezijevim koordinatama,
pozitivan realan broj r, i realan broj ϕ uz $0 \leq \phi < 2\pi$, su polarne koordinate točke T, uredjeni par (r,ϕ) je prikaz točke T u polarnim koordinatama.



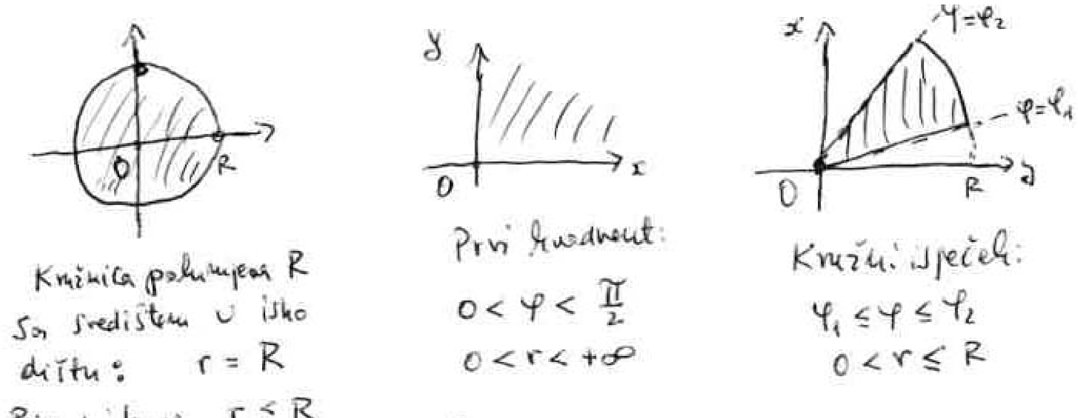
sl. 9

Veza izmedju kartezijevih i polarnih koordinata (sl.10.).
Formule kojim se iz polarnih koordinata dobiju kartezijeve:
$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi.$



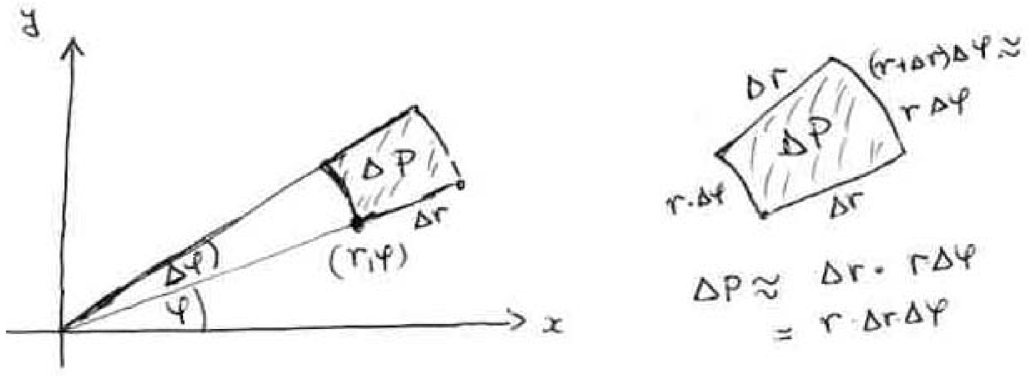
Sl. 10

Primjer 5. - jednadžbe u polarnim koordinatama.
Na sl.11. predočeni su neki podskupovi ravnine i njihove jednadžbe u polarnim koordinatama.



Sl. 11.

Djelić površine i obujma, diferencijal površine i obujma u polarnim koordinatama (sl.12.).

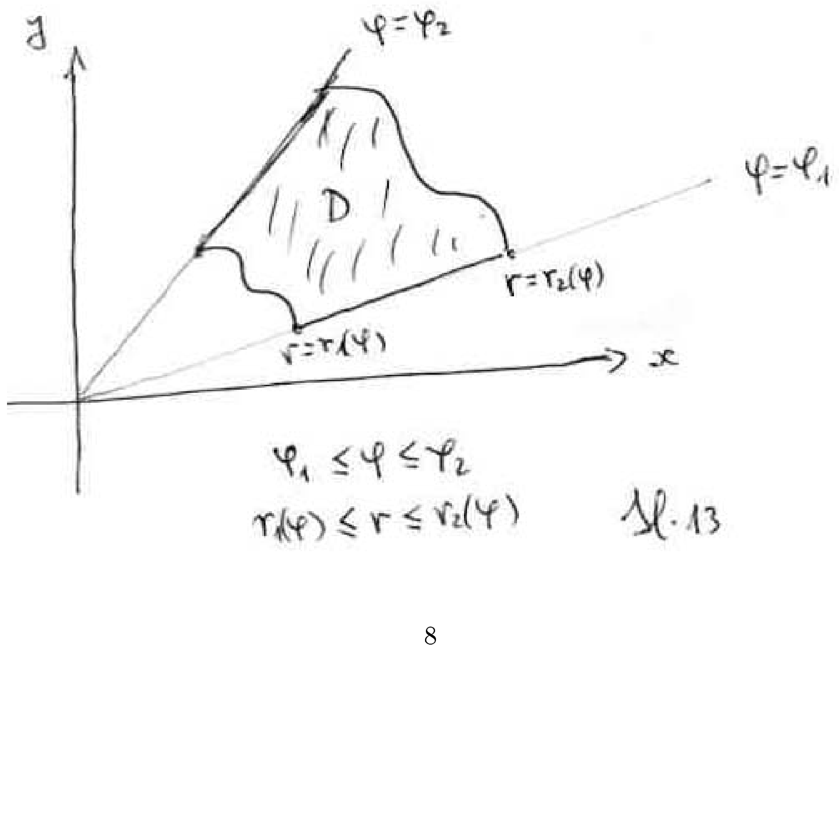


Sl. 12.

$\Delta P(r,\phi) \approx r\Delta r\Delta\phi$
$dP(r,\phi) = rdrd\phi.$
Dakle, $dxdy$ u kartezijevim koordinatama, prelazi u $rdrd\phi$ u polarnim koordinatama.
Zato je djelić obujma što ga nad djelićem površine čini pozitivna funkcija f:
$\Delta V(r,\phi) \approx f(r\cos\phi, r\sin\phi)r\Delta r\Delta\phi,$
a pripadni diferencijal obujma
$dV(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi.$

Dvostruki integral u polarnim koordinatama (sl.13.).
Ako je područje D zadano u polarnim koordinatama nejednadžbama:
$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ *i* $r_1(\phi) \leq r \leq r_2(\phi)$, onda je

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{\phi_1}^{\phi_2}[\int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdr]d\phi$$



Sl. 13

Primjer 6. - obujam polukugle polumjera R. Prema primjerima 1. i 2. vidimo da tu područje D zadovoljava uvjete za uzastopno integriranje. Naime, krug polumjera R zadan je uvjetima

$$-R \leq x \leq R \ i \ -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}$$

Zato je:
$V = \int\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy = \int_{-R}^{R}[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dy]dx.$
Vidimo da se problem svodi na računanje kompliciranih integrala. Medjutim, uz pomoć polarnih koordinata, račun postaje puno jednostavniji. Naime, u polarnim se koordinatama krug polumjera R zadaje nejednadžbom $r \leq R$, dakle: $0 \leq \phi < 2\pi$ i $0 < r \leq R$. Takodjer, vrijedi $x^2+y^2=r^2$, pa dobijemo:
$V = \int\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}[\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}rdr]d\phi = [R^2-r^2=t^2,\ rdr = -tdt] =$
$\int_0^{2\pi}[\int_R^0(-t^2)dt]d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3}d\phi = (\frac{R^3}{3}\phi)\mid_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^3}{3},$
što je obujam polukugle polumjera R.

Dvostruki integral bilo koje funkcije dviju varijabla.
Analogno interpretaciji jednostrukog integrala prema kojem je integral negativne funkcije suprotan površini izmedju grafa i x-osi, dvostruki integral negativne funkcije je suprotan obujmu izmedju grafa i xy-ravnine.
Takodjer, uzastopno integriranje i zamjena s polarnim koordinatama mogu se primijeniti općenito, a ne samo za pozitivne funkcije.

Trostruki, višestruki integral.
Analogno dvostrukom definira se trostruki integral, ali tu ga nećemo obradjivati.